• (X = 1) se réalise quand le tirage contient une seule boule rouge portant 2 $\Rightarrow p(X=1) = \dfrac{C_4^2 \times C_2^1}{C_6^3} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

• (X = 2) se réalise quand le tirage contient une deux boules rouges portant 2 $\Rightarrow p(X=2) = \dfrac{C_4^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

D'où le tableau de loi de probabilité de X

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

b- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1$

3)a- Comme on remet les boules dans l'urne après chaque épreuve alors les répétions sont indépendentes.

Désignons par C_n :« l'événement C se réalise au moins une fois dans les n répetitions ».

$\Rightarrow \overline{C}_n$:« l'événement C ne se réalise pas pendant les n répétitions »

$\Rightarrow p(\overline{C}_n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \Rightarrow p_n = p(C_n) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

b- $p_n \geqslant 0,99 \iff 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \geqslant 0,99$

$\iff \left(\frac{1}{5}\right)^n \leqslant 0,01 \iff \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n \leqslant \ln 10^{-2}$

$\iff n \ln\frac{1}{5} \leqslant \ln 10^{-2} \iff n \geqslant \dfrac{\ln 10^{-2}}{\ln\frac{1}{5}} = 2.8614$

Conclusion: le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$ est $\boxed{n = 3}$

EXERCICE 2

1)a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^{\frac{x^3}{e^{x^2}}}\right] = e.\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^{\frac{x^2}{3}}}\right)^3$

posons $t = \frac{x^2}{3}$ donc $x = \sqrt{3}\sqrt{t}$

$= e.\lim\limits_{t\to+\infty} \left[\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{t}}{e^t}\right]^3 = e.\lim\limits_{t\to+\infty} \left[\sqrt{3}\,\dfrac{t}{e^t} \times \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right]^3$

$= 0$ **car** $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \to 0$ et $\dfrac{t}{e^t} \to 0$ quand $t \to +\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.